数理解析研究所講究録 1431 巻 2005 年 55-67

Inner modality 4 以下の半擬斉次孤立特異点に付随したホロノミック系について

近畿大学理工学部 中村弥生 (Yayoi Nakamura) Kinki Univ.
新潟大学工学部 田島慎一 (Shinichi Tajima) Niigata Univ.

概要

特異点に付随したホロノミック系の重複度として, 超平面孤立特異点に対する不変量を定義する. この不変量を半擬斉次孤立特異点の場合に計算する方法について述べる. また, inner modality が 4 以下の場合にこの不変量を計算し, 古典的不変量との関係について述べる.

1 序

グロタンディック双対性 (Grothendieck duality) を用いると, 与えられた超平面孤立特異点 (hypersurface isolated singularity) に台を持つ代数的局所コホモロジー類のなす空間により, Milnor algebra の双対空間を構成することができる. 論文 [3], [5] において, 一階の偏微分作用素で代数的局所コホモロジー類を annihilate するものからなるホロノミック系を考察し, その重複度として, $\mu_f^{(1)}$ を定義し, これが特異点の不変量であることを示した. また, この量がミルナー数 μ とチュリナ数 τ と関係することを示唆する結果を得た. つまり, modality が 2 以下の場合には $\mu_f^{(1)} = \mu - \tau + 1$ という関係が成り立つことを示した. この関係がより一般の特異点について成り立つかどうかを調べるために, 本稿では, inner modality が 4 以下の場合について考察し, 上記の関係式が成立することを報告する.

2 ホロノミック系から導かれた不変量について

X を n 次元アフィン空間 $\mathbb{C}^n$ の原点の近傍とし, $\mathcal{O}_X$ を X で定義された正則関数の層とする. $f \in \mathcal{O}_{X,O}$ を正則関数の O での芽で原点に超平面孤立特異点を定義するものとし, $\mathcal{J}$ を その $\mathcal{O}_{X,O}$ におけるヤコビイデアルとする. $\mathcal{H}_M$ によって, 原点に台を持つ代数的局所コホモロジー類であり, ヤコビイデアル $\mathcal{J}$ に属する任意の関数によって annihilate されるもの全体のなす空間を表す,

$$\mathcal{H}_M = \{\eta \in \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X) \mid g\eta = 0, \forall g \in \mathcal{J}\}.$$

このとき, $\mathcal{H}_M$ は n 次エクステンション群 $\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_{X,O}}(\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J},\mathcal{O}_{X,O})$ と同型であるから, グロタンディック双対性の非退化性により, $\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}$ の双対空間とみなすことができる.

$\mathcal{D}_X$ を X 上の線形偏微分作用素全体の層とする. また, 代数的局所コホモロジー類 $\eta \in \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ の annihilator 全体のなす $\mathcal{D}_{X,O}$ のイデアルを $\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}_{X,O}}(\eta)$ であらわす; $\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}_{X,O}}(\eta) = \{P \in \mathcal{D}_{X,O} \mid P\eta = 0\}$. ただし, $\mathcal{D}_{X,O}$ は層 $\mathcal{D}_X$ の O での茎とする. ホロノミック系 $\mathcal{D}_{X,O}/\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}_{X,O}}(\eta)$ は $\mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ と同型となり, 単純 (simple) な $\mathcal{D}_X$-加群となる.

$\eta \in \mathcal{H}_M$ を annihilate する高々一階の偏微分作用素の芽全体

$$\mathcal{L}^{(1)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\eta) = \{P \in \mathcal{D}_{X,O} \mid \mathrm{ord}P \leq 1, P\eta = 0\}$$

をとり, $\mathcal{L}^{(1)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\eta)$ の生成する $\mathcal{D}_{X,O}$ の左イデアルを $\mathcal{A}nn^{(1)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\eta)$ と置く;

$$\mathcal{A}nn^{(1)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\eta) = \mathcal{D}_{X,O}\mathcal{L}^{(1)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\eta).$$

明らかに, $\mathcal{A}nn^{(1)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\eta) \subseteq \mathcal{A}nn_{\mathcal{D}_{X,O}}(\eta)$ が成り立つ. 以下, $\mathcal{D}_X$-加群 $\mathcal{D}_{X,O}/\mathcal{A}nn^{(1)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\eta)$ を $\mathcal{M}^{(1)}_\eta$ と置く. $\mathcal{M}^{(1)}_\eta$ はホロノミック系 $\mathcal{D}_{X,O}/\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}_{X,O}}(\eta)$ の性質を反映し, regular singular なホロノミック $\mathcal{D}_X$-加群である.

$\mathcal{H}_M$ は $\mathcal{O}_{X,O}$ 上, 一つのコホモロジー類で生成することができる. 論文 [5] において, $\mathcal{H}_M$ の $\mathcal{O}_{X,O}$ 上の任意の生成元 σ に対し, $\mathcal{M}^{(1)}_\sigma$ の $\mathcal{D}_X$-加群としての単純性と特異点の擬斉次性とが同値であることを示した. この結果は, 特異点が擬斉次でない場合には, ホロノミック系 $\mathcal{M}^{(1)}_\sigma$ の重複度が 1 より真に大きいことを証明することによって得られたものである. 今, σ と σ' を $\mathcal{H}_M$ の二つの異なる生成元とすると, 対応するホロノミック $\mathcal{D}_X$-加群 $\mathcal{M}^{(1)}_\sigma$ と $\mathcal{M}^{(1)}_{\sigma'}$ は同型である. 特に, その重複度は $\mathcal{H}_M$ の生成元のとり方によらず, 等しい. つまり, 与えられた超平面孤立特異点に対し, 次のように不変量を定義することができる.

定義 1 $\mathcal{H}_M$ の $\mathcal{O}_{X,O}$ 上の任意の生成元 $\sigma \in \mathcal{H}_M$ に対し, ホロノミック系 $\mathcal{M}^{(1)}_\sigma$ の重複度を $\mu^{(1)}_f$ と定義する.

この不変量 $\mu^{(1)}_f$ は, 関数 f で定義された特異点の非擬斉次性を測るものであることが分かる. 実際, 次の結果がある.

定理 2.1 ([5]) 関数 $f \in \mathcal{O}_{X,O}$ で定義された特異点に対し, 次の条件は同値である.

(1) $\mu^{(1)}_f = 1$.

(2) f の定義する特異点は擬斉次特異点である.

定理 **2.2** (**[3]**) 正則関数 $f \in \mathcal{O}_{X,O}$ は原点に半擬斉次 *unimodal* 特異点を定義するとする．このとき，$\mu_f^{(1)} = 2$ である．

本稿では，modality が 2 より大きい典型的な特異点に対する不変量 $\mu_f^{(1)}$ について調べ，次の結果を得た．

主定理　$f_0 \in \mathcal{O}_{X,O}$ を原点に inner modality が 4 以下である擬斉次孤立特異点を定義する正則関数とする．e を $\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}_0$ の upper monomial とする．ここで，$\mathcal{J}_0$ は関数 f_0 の $\mathcal{O}_{X,O}$ 上のヤコビイデアルとする．関数 $f = f_0 + a \cdot e \in \mathcal{O}_{X,O}$ (a は零ではない助変数) に対し，

$$\mu_f^{(1)} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J} - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X,O}/(f, \mathcal{J}) + 1 \tag{2.1}$$

が成り立つ．ここで，$(f, \mathcal{J})$ は関数 f とそのヤコビイデアル $\mathcal{J}$ によって生成される $\mathcal{O}_{X,O}$ のイデアルである．

この結果は，定理 2.1 と定理 2.2 の拡張となっていることが分かる．実際，$\mu_f^{(1)} = 1$ は $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X,O}/(f, \mathcal{J})$ と同値であるから $\mathcal{J} = (f, \mathcal{J})$ であり，これは，特異点が擬斉次であることと同値である (cf. [4])．また，関数 f が unimodal 特異点を定義する場合，$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J} - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X,O}/(f, \mathcal{J}) = 1$ である．この場合，(2.1) は $\mu_f^{(1)} = 2$ となる．

例 **1** $f_0 = x^5 + y^7$ とおく．これは，N_{24}^1 型斉次特異点の標準形であり (cf. [7])．ミルナー数は $\dim \mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}_0 = 24$ である．*Milnor algebra* $\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}_0$ の単項基底は $\{1, y, x, y^2, xy, x^2, y^3, xy^2, x^2y, y^4, x^3, xy^3, x^2y^2, y^5, x^3y, xy^4, x^2y^3, x^3y^2, xy^5, x^2y^4, x^3y^3, x^2y^5, x^3y^4, x^3y^5\}$ で与えられる．このうち，最後の 4 個の単項式 x^3y^3, x^2y^5, x^3y^4, x^3y^5 が *upper monomial* である．

$f = y^7 + x^5 + ax^3y^3$ に対して $\mu_f^{(1)} = 4$,
$f = y^7 + x^5 + ax^2y^5$ に対して $\mu_f^{(1)} = 3$,
$f = y^7 + x^5 + ax^3y^4$ に対して $\mu_f^{(1)} = 3$,
$f = y^7 + x^5 + ax^3y^5$ に対して $\mu_f^{(1)} = 2$

となっている．これらの場合，チュリナ数 $\dim \mathcal{O}_{X,O}/(f, \mathcal{J})$ はそれぞれ 21, 22, 22, 23 である．

3　$\mathcal{H}_M$ の生成元と不変量 $\mu_f^{(1)}$ について

不変量 $\mu_f^{(1)}$ を計算するためには，$\mathcal{H}_M$ の適当な生成元をひとつ選び，ホロノミック系 $\mathcal{M}_\sigma^{(1)}$ の重複度を計算すればよい．そこでこの節では，半擬斉次孤立特異点の場合に，$\mathcal{H}_M$ の生成元の重みつき次数 (weighted degree) に関する性質を調べ，生成元の構成の仕方について述べる．さらに，不変量 $\mu_f^{(1)}$ の計算法について述べる．

代数的局所コホモロジー類 $[\frac{1}{x^{\mathbf{k}}}] = [\frac{1}{x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}}] \in \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ に対し，このコホモロジー類の，重み $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{N}^n$ に関する重みつき次数を

$$\deg_{\mathbf{w}}(\left[\frac{1}{x^{\mathbf{k}}}\right]) = -\mathbf{k}\cdot\mathbf{w}$$

で定義する．ただし，$\mathbf{k}\cdot\mathbf{w} = k_1w_1 + \cdots + k_nw_n$ である．また，記号 $[\frac{1}{x^{\mathbf{k}}}]$ はグロタンディックシンボル (Grothendieck symbol) $\left[\begin{array}{c} 1 \\ x^{\mathbf{k}} \end{array}\right] \in \mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_{X,O}}(\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}, \mathcal{O}_{X,O})$ に対応する代数的局所コホモロジー類を表す．

定義 2 代数的局所コホモロジー類 $\eta \in \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ が

$$\left[\sum_{\mathbf{k}\in\Lambda_\eta} c_{\mathbf{k}} \frac{1}{x^{\mathbf{k}}}\right] = \sum_{\mathbf{k}\in\Lambda_\eta} c_{\mathbf{k}} \left[\frac{1}{x^{\mathbf{k}}}\right]$$

とあらわされているとする．ただし，Λ_η は $\mathbb{N}^n$ の有限部分集合とする．重み $\mathbf{w} \in \mathbb{N}^n$ に関する η の重みつき次数 $\deg_{\mathbf{w}}(\eta)$ を $\min\{\deg_{\mathbf{w}}([\frac{1}{x^{\mathbf{k}}}]) \mid c_{\mathbf{k}} \neq 0, \mathbf{k} \in \Lambda_\eta\}$ で与える．

以下，原点に超平面孤立特異点を定義する関数 f の，重み $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{N}^n$ に対する重みつき次数を $\deg_{\mathbf{w}}(f)$ とおく．$|\mathbf{w}| = \sum_{j=1}^n w_j$ とおく．$\mathcal{H}_M$ の任意の生成元に関して，次の結果が成り立つ ([2])．

定理 3.1 ([2]) 代数的局所コホモロジー類 $\eta \in \mathcal{H}_M$ に対して，次の条件は同値である．

(1) $\deg_{\mathbf{w}}(\eta) = -n\cdot\deg_{\mathbf{w}}(f) + |\mathbf{w}|$.

(2) η は $\mathcal{O}_{X,O}$ 上 $\mathcal{H}_M$ を生成する．

いま，$s = n\cdot\deg_{\mathbf{w}} - |\mathbf{w}|$ とおく．$\succ$ を $\mathcal{O}_{X,O}$ 上の項順序とし，$B = \{b_1, \ldots, b_\mu\}$ を $\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}_0$ の単項基底とする．ただし，$\mathcal{J}_0$ は，関数 f の擬斉次部分 f_0 のヤコビイデアルとする．

次の指数の集合を用意する．

$$\Lambda_+ = \{\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n_+ \mid 0 < \mathbf{k}\cdot\mathbf{w} < s = n\cdot\deg_{\mathbf{w}}(f) - |\mathbf{w}|\}.$$

$$\Lambda_B = \{\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n_+ \mid \mathbf{k} = \mathbf{j} + (1, \ldots, 1),\ x^{\mathbf{j}} \in B\}.$$

また，

$$\mathcal{T} = \mathrm{Span}\{[\frac{1}{x^{\mathbf{k}}}] \mid \mathbf{k} \in \Lambda_+ \setminus \Lambda_B\}$$

とおく．$\mathcal{H}_{f_0} = \{\eta \in \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X) \mid g\eta = 0, \forall g \in \mathcal{J}_0\}$ とおく．このとき，次を得る．

定理 **3.2** $f=f_0+g$ を, f_0 を擬斉次部分に持つ半擬斉次関数とする. σ_0 を, $\mathcal{H}_{f_0}$ の $\mathcal{O}_{X,O}$ 上の生成元とする. このとき, 代数的局所コホモロジー類 $\tau\in\mathcal{T}$ であって,

$$\sigma=\sigma_0+\tau\in\mathcal{H}_f \tag{3.1}$$

が $\mathcal{H}_f$ の $\mathcal{O}_{X,O}$ 上の生成元となるようなものが存在する.

グロタンディック双対性により, σ_0 が決まれば, (3.1) を満たす $\tau\in\mathcal{T}$ は一意に決まる. さらに, 次が成り立つ.

補題 **3.1** σ_0 を, $\mathcal{H}_{f_0}$ の $\mathcal{O}_{X,O}$ 上の生成元とする. $\tau\in\mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ を

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\tau+\frac{\partial g}{\partial x_i}\sigma_0=0,\ i=1,\ldots,n$$

を満たす代数的局所コホモロジー類であるとする. このとき, 代数的局所コホモロジー類 $\sigma=\sigma_0+\tau$ は, $\mathcal{H}_f$ の $\mathcal{O}_{X,O}$ 上の生成元となる.

さて, $V=\mathrm{Span}B$ に対し,

$$L=\{P=\sum_{j=1}^{n}p_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}+q(x)\mid P\sigma=0,\ q(x),\,p_j(x)\in V,\ j=1,\ldots,n\}$$

とおく. Θ を, 次で定義される一階偏微分作用素の集合とする,

$$\Theta=\{v_P\mid P=v_P+q(x)\in L\},$$

ただし, v_P は偏微分作用素 P の一階部分をあらわす一階偏微分作用素とする (i.e., $P-v_p\in V$). 今, 関数 $h\in\mathcal{O}_{X,O}$ に対し, $\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}$ 上の剰余類を $\bar{h}\in\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}$ であらわし,

$$K_f=\{\bar{h}\in\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}\mid v_P(h)\sigma=0,\ \forall v_P\in\Theta\}$$

とおく. 論文 [3], [5] において, 次の結果を得た.

定理 **3.3 ([3], [5])**

(1) $\{\eta\in\mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)\mid R\eta=0,\ \forall R\in\mathcal{A}nn^{(1)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\sigma)\}=\{\bar{h}\sigma\mid\bar{h}\in K_f\}$.

(2) $\mu^{(1)}_f=\dim_{\mathbb{C}}K_f$.

以下に, $\mu^{(1)}_f$ の計算手順を与える. 実際の計算は, 有限次元ベクトル空間 V 上で行えばよい.

計算手順 **1** $f\in\mathcal{O}_{X,O}$ を原点に半擬斉次孤立特異点を定義する正則関数とする.

(1) $\mathcal{H}_M$ の $\mathcal{O}_{X,O}$ 上の生成元 σ の *relative Čech cohomology* による表現を求める (定理 3.2, 手順 4.1, 手順 4.2 参照).

(2) Θ を構成する.

(3) Θ に属する作用素 $v_{P_1},\ldots,v_{P_\ell}$ であって, 対応する偏微分作用素 $P_1,\ldots,P_\ell \in L$ と $\mathcal{J}$ に属する零階の偏微分作用素が $\mathcal{A}nn^{(1)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\sigma)$ の生成系となっているようなものを選ぶ.

(4) $h \in V$ に対する連立方程式 $v_{P_i}(h)\sigma = 0$ $(i = 1,\ldots,\ell)$ を解くことにより, K_f を計算する.

定理 3.3 によって, 上の手順で計算された K_f の次元は不変量 $\mu^{(1)}_f$ に等しい.

4 inner modality ≤ 4 の場合

f_0 を原点に擬斉次孤立特異点を定義する正則関数で, 重み $\mathbf{w}$ に対する重みつき次数が $\deg_{\mathbf{w}}(f_0)$ であるものとする. $\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}_0$ の単項基底 B のうち, 重みつき次数が条件 $\deg_{\mathbf{w}}(e) \geq \deg_{\mathbf{w}}(f_0)$ を満たす $e \in B$ の個数を特異点の inner modality という. 吉永・鈴木の論文 [7] において, inner modality が 4 以下の擬斉次超平面孤立特異点の標準形が与えられている. 各標準形に upper monomial の線形結合を加えることによって, inner modality が 4 以下の半擬斉次孤立特異点を得ることができる. この節では特に, inner modality が 4 以下の擬斉次孤立特異点に対し, upper monomial $e \in B$ をひとつ加えた $f_0 + a\cdot e$ (a は零ではない助変数) の形の関数によって定義される半擬斉次孤立特異点を考える.

$d = \deg_{\mathbf{w}}(e) - \deg_{\mathbf{w}}(f_0)$, $s = n\cdot\deg_{\mathbf{w}}(f_0) - |\mathbf{w}|$ とおく. また,

$$\mathcal{T}_j = \mathrm{Span}\{[\frac{1}{x^{\mathbf{k}}}] \mid \mathbf{k}\cdot\mathbf{w} = s - jd,\ \mathbf{k} \notin \Lambda_B\}$$

とおき, $m = \min\{j \mid \mathcal{T}_k = \emptyset,\ k > j\}$ とおく. このとき, 次の結果を得る.

補題 4.1 σ_0 を $\mathcal{H}_{f_0}$ の $\mathcal{O}_{X,O}$ 上の生成元で,

$$\sigma_0 = \sum_{\mathbf{k}\cdot\mathbf{w}=s} c_{\mathbf{k}}[\frac{1}{x^{\mathbf{k}}}]$$

とあらわされるものとする. このとき, σ_0 に対応する $\mathcal{H}_f$ の生成元 σ は

$$\sigma = \sigma_0 + \sum_{j=1}^{\ell} a^j \tau_j$$

とあらわすことができる. ここで, $\tau_j \in \mathcal{T}_j$ である.

補題 4.2 σ_0 を $\mathcal{H}_{f_0}$ の $\mathcal{O}_{X,O}$ 上の生成元で，重み付き次数が一定であるコホモロジー類 $[1/x^{\mathbf{k}}]$ の結合で表されているものとする．$\tau_j \in \mathcal{T}_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ を関係式

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_i}\tau_1 + \frac{\partial e}{\partial x_i}\sigma_0 = 0,\ i = 1, \ldots, n,$$

と $k = 1, \ldots, m-1$ に対する関係式

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_i}\tau_{k+1} + \frac{\partial e}{\partial x_i}\tau_k = 0,\ i = 1, \ldots, n$$

を満たす代数的局所コホモロジー類とする．このとき，代数的局所コホモロジー類 $\sigma_0 + \sum_{j=1}^{m} a^j \tau_j$ は $\mathcal{H}_f$ に属し，$\mathcal{H}_f$ の $\mathcal{O}_{X,O}$ 上の生成元となる．

計算手順 1 の第一手順に上記の結果を用いて計算することにより，次の結果をえる．

命題 4.1 $f_0 \in \mathcal{O}_{X,O}$ を原点に *inner modality* 4 以下の擬斉次孤立特異点を定義する正則関数とする．$\deg_{\mathbf{w}}(e) > \deg_{\mathbf{w}}(f_0)$ を満たす基底単項式 $e \in B$ に対し，$f = f_0 + a \cdot e$ とおく．このとき，$K_f = \mathrm{Span}\{1, \bar{h} \mid h \in (f)\}$ が成り立つ．ここで，$\bar{h}$ は関数 $h \in \mathcal{O}_{X,O}$ の $\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}$ における同値類であり，(f) は関数 f で生成される $\mathcal{O}_{X,O}$ のイデアルである．

$\mathcal{J} : (f)$ をイデアル商とする．上記の結果により，以下の結果を得る．

定理 4.1 f_0 を原点に *inner modality* 4 以下の擬斉次孤立特異点を定義する正則関数とする．$\deg_{\mathbf{w}}(e) > \deg_{\mathbf{w}}(f_0)$ を満たす基底単項式 $e \in B$ に対し，$f = f_0 + a \cdot e$ とおく．このとき，

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X,O}}(\mathcal{D}_{X,O}/\mathcal{A}nn^{(1)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\sigma), \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X))$$
$$\cong \mathrm{Span}(\sigma) + \{\eta \in \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X) \mid r(x)\eta = 0, \forall r(x) \in \mathcal{J} : (f)\}$$

が成り立つ．

定理 4.2 f_0 を原点に *inner modality* 4 以下の擬斉次孤立特異点を定義する正則関数とする．$\deg_{\mathbf{w}}(e) > \deg_{\mathbf{w}}(f_0)$ を満たす基底単項式 $e \in B$ に対し，$f = f_0 + a \cdot e$ とおく．このとき，
$\mu_f^{(1)} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J} - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X,O}/(f, \mathcal{J}) + 1$ が成り立つ．

Proof. イデアル商 $f : \mathcal{J}$ に対して，

$$\dim \mathcal{O}_{X,O}/(f : \mathcal{J}) = \dim \mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J} - \dim \mathcal{O}_{X,O}/(f, \mathcal{J})$$

が成り立つ．よって，定理 4.1 により定理 4.2 を得る．□

5 Example (E_{24} 型特異点)

関数 $f_0 = x^3 + y^{13}$ は 重み $(13, 3)$ に対して重みつき次数 39 であり, 原点に E_{24} 型擬斉次孤立特異点を定義する (cf. [7]).

$\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}_0$ の単項基底は

$$\{1, y, y^2, y^3, y^4, x, y^5, xy, y^6, xy^2, y^7, xy^3, y^8, xy^4, y^9,$$

$$xy^5, y^{10}, xy^6, y^{11}, xy^7, xy^8, xy^9, xy^{10}, xy^{11}\}$$

で与えられ, このうち xy^9, xy^{10}, xy^{11} が upper monomial である.

(1) $f = f_0 + axy^{11} = x^3 + y^{13} + axy^{11}$ とおく. ここで $a \neq 0$ はパラメーターとする. 補題 4.1, 補題 4.2 によって, $\mathcal{H}_M$ の生成元

$$\sigma = [\frac{1}{x^2y^{12}} - a(\frac{11}{13}\frac{1}{xy^{14}} + \frac{1}{3}\frac{1}{x^4y}) + a^2\frac{11}{39}\frac{1}{x^3y^3}]$$

を得る. $\mathcal{L}^{(1)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\sigma)$ は, $\mathcal{J}$ の関数を零階の微分作用素とみなしたものと, 次に与える 4 個の一階の偏微分作用素とによって, $\mathcal{O}_{X,O}$ 上生成される;

- $xy^2\frac{\partial}{\partial y} + 12xy - \frac{33}{13}a^2y^{10} - \frac{363}{169}a^3xy^8$
- $(xy - \frac{11}{72}a^2y^{10})\frac{\partial}{\partial x} - \frac{11}{156}ax\frac{\partial}{\partial y} + 2y + \frac{847}{12168}a^3y^8 + \frac{9317}{158184}a^4xy^6$
- $(xy + \frac{77}{156}a^2y^{10})\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}y^2\frac{\partial}{\partial y} + 8y - \frac{847}{2028}a^3y^8 - \frac{9317}{26364}a^4xy^6$
- $(xy^2 - \frac{11}{39}a^2y^{11})\frac{\partial}{\partial x} + 2y^2 + \frac{11}{13}ax$

ここで,

$$v_{P_1} = xy^2\frac{\partial}{\partial y},\ v_{P_2} = (xy - \frac{11}{72}a^2y^{10})\frac{\partial}{\partial x} - \frac{11}{156}ax\frac{\partial}{\partial y},$$

$$v_{P_3} = (xy + \frac{77}{156}a^2y^{10})\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}y^2\frac{\partial}{\partial y},\ v_{P_4} = (xy^2 - \frac{11}{39}a^2y^{11})\frac{\partial}{\partial x}$$

とおく. これらの作用素に関する斉次偏微分方程式 $v_{P_1}(h)\sigma = \cdots = v_{P_4}(h)\sigma = 0$ を解くことにより, $K_f = \mathrm{Span}\{1, xy^{11}\}$ を得る. よって $\dim K_f = 2$ となる. $\dim \mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J} = 24$ であり $\dim \mathcal{O}_{X,O}/(f, \mathcal{J}) = 23$ であることから, $\mu_f^{(1)} = \dim \mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J} - \dim \mathcal{O}_{X,O}/(f, \mathcal{J}) + 1 = 2$ が成り立つことが確かめられた.

(2) $f = f_0 + axy^{10} = x^3 + y^{13} + axy^{10}$ とおく. ここで $a \neq 0$ はパラメーターである. 補題 4.1, 補題 4.2 によって, $\mathcal{H}_M$ の生成元として

$$\sigma = [\frac{1}{x^2y^{12}} + a(-\frac{1}{3}\frac{1}{x^4y^2} - \frac{10}{13}\frac{1}{xy^{15}}) + a^2\frac{10}{39}\frac{1}{x^3y^5}]$$

を得る. $\mathcal{L}^{(1)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\sigma)$ は, $\mathcal{J}$ に属する零階の偏微分作用素と次の一階の偏微分作用素とによって $\mathcal{O}_{X,O}$ 上 生成される;

- $ax\frac{\partial}{\partial y} + (-\frac{78}{5}xy^2 + \frac{7}{3}a^2y^9)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{156}{5}y^2 - \frac{20}{39}a^3y^6 - \frac{200}{507}a^4xy^3 + \frac{2000}{19773}a^6y^{10} + \frac{20000}{257049}a^7xy^7$
- $y^3\frac{\partial}{\partial y} + (3xy^2 + \frac{20}{39}a^2y^9)\frac{\partial}{\partial x} + 18y^2 - a^3y^6\frac{200}{507} - \frac{2000}{6591}a^4xy^3 + \frac{20000}{257049}a^6y^{10} + \frac{200000}{3341637}a^7xy^7$
- $xy^3\frac{\partial}{\partial x} - \frac{10}{39}a^2y^{10}\frac{\partial}{\partial x} + 2y^3 + \frac{10}{13}ax$
- $y^{12}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{10}{13}ay^9 - \frac{100}{169}a^2xy^6$

対応する偏微分方程式系を解くことにより，$K_f = \mathrm{Span}\{1, xy^{10}, xy^{11}\}$ を得る．よって $\dim K_f = 3$ を得る．今 $\dim \mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J} = 24$ であり $\dim \mathcal{O}_{X,O}/(f, \mathcal{J}) = 22$ であることから，$\mu_f^{(1)} = \dim \mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J} - \dim \mathcal{O}_{X,O}/(f, \mathcal{J}) + 1 = 3$ が確かめられた．

(3) $f = f_0 + axy^9 = x^3 + y^{13} + axy^9$ とおく．ここで $a \neq 0$ はパラメーターである．補題 4.1, 補題 4.2 によって，$\mathcal{H}_M$ の生成元として

$$\sigma = [\frac{1}{x^2y^{12}} - a(\frac{1}{3}\frac{1}{x^4y^3} + \frac{9}{13}\frac{1}{xy^{16}}) + a^2\frac{3}{13}\frac{1}{x^3y^7}]$$

を得る．$\mathcal{L}^{(1)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\sigma)$ は，$\mathcal{J}$ に属する関数で与えられる零階の偏微分作用素と次の一階の偏微分作用素とによって $\mathcal{O}_{X,O}$ 上 生成される；

- $(-\frac{52}{3}xy^3 + \frac{5}{2}a^2y^8)\frac{\partial}{\partial x} + ax\frac{\partial}{\partial y} - \frac{104}{3}y^3 - \frac{3}{26}a^3y^4 - \frac{27}{338}a^4x + \frac{81}{4394}a^6y^5$
  $+ \frac{729}{57122}a^7xy - \frac{2187}{742586}a^9y^6 - \frac{19683}{9653618}a^{10}xy^2 + \frac{59049}{125497034}a^{12}y^7$
  $+ \frac{531441}{1631461442}a^{13}xy^3 - \frac{1594323}{21208998746}a^{15}y^8 - \frac{14348907}{275716983698}a^{16}xy^4$
  $+ \frac{43046721}{3584320788074}a^{18}y^9 + \frac{387420489}{46596170244962}a^{19}xy^5 - \frac{1162261467}{605750213184506}a^{21}y^{10}$
  $- \frac{10460353203}{7874752771398578}a^{22}xy^6 + \frac{31381059609}{102371786028181514}a^{24}y^{11}$
  $+ \frac{282429536481}{1330833218366359682}a^{25}xy^7$
- $y^4\frac{\partial}{\partial y} + (4xy^3 + \frac{3}{26}a^2y^8)\frac{\partial}{\partial x} + 20y^3 - \frac{27}{338}a^3y^4 - \frac{243}{4394}a^4x + \frac{729}{57122}a^6y^5$
  $+ \frac{6561}{742586}a^7xy - \frac{19683}{9653618}a^9y^6 - \frac{177147}{125497034}a^{10}xy^2 + \frac{531441}{1631461442}a^{12}y^7$
  $+ \frac{4782969}{21208998746}a^{13}xy^3 - \frac{14348907}{275716983698}a^{15}y^8 - \frac{129140163}{3584320788074}a^{16}xy^4$
  $+ \frac{387420489}{46596170244962}a^{18}y^9 + \frac{3486784401}{605750213184506}a^{19}xy^5 - \frac{10460353203}{7874752771398578}a^{21}y^{10}$
  $- \frac{94143178827}{102371786028181514}a^{22}xy^6 + \frac{282429536481}{1330833218366359682}a^{24}y^{11}$
  $+ \frac{2541865828329}{17300831838762675866}a^{25}xy^7$
- $(xy^4 - \frac{3}{13}a^2y^9)\frac{\partial}{\partial x} + 2y^4 + \frac{9}{13}ax$
- $y^{12}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{9}{13}ay^8 - \frac{81}{169}a^2xy^4 + \frac{243}{2197}a^4y^9 + \frac{2187}{28561}a^5xy^5 - \frac{6561}{371293}a^7y^{10}$
  $- \frac{59049}{4826809}a^8xy^6 + \frac{177147}{62748517}a^{10}y^{11} + \frac{1594323}{815730721}a^{11}xy^7$

対応する偏微分方程式系を解くことにより，$K_f = \mathrm{Span}\{1, xy^9, xy^{10}, xy^{11}\}$，特に $\dim K_f = 3$ を得る．今，$\dim \mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J} = 24$ であり $\dim \mathcal{O}_{X,O}/(f, \mathcal{J}) = 21$ であることから，

$$\mu_f^{(1)} = \dim \mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J} - \dim \mathcal{O}_{X,O}/(f, \mathcal{J}) + 1 = 4$$

が成り立つことが確かめられた．

5.1 Appendix

最後に論文 [7] にある inner modality が 4 以下の半擬斉次孤立特異点の標準形 f と対応する upper monomial を与え，各 upper monomial e に対して，関数 $f = f_0 + a \cdot e$ に対する不変量 $\mu_f^{(1)}$ を与える (U_{14} 型特異点の標準形の正しい形は，論文 [7] の著者である鈴木氏からいただいた).

inner modality 2

type	quasihomogeneous part	upper monomials	$\mu_f^{(1)}$
E_{18}	x^3+y^{10}	xy^7, xy^8	$3, 2$
E_{19}	x^3+xy^7	y^{11}, y^{12}	$3, 2$
E_{20}	x^3+y^{11}	xy^8, xy^9	$3, 2$
W_{17}	x^4+xy^5	y^7, y^8	$3, 2$
W_{18}	x^4+y^7	x^2y^4, x^2y^5	$3, 2$
Z_{17}	x^3y+y^8	xy^6, xy^7	$3, 2$
Z_{18}	x^3y+xy^6	y^9, y^{10}	$3, 2$
Z_{19}	x^3y+y^9	xy^7, xy^8	$3, 2$
Q_{16}	$x^3+yz^2+y^7$	xy^5, xz^2	$3, 2$
Q_{17}	$x^3+yz^2+xy^5$	y^8, y^9	$3, 2$
Q_{18}	$x^3+yz^2+y^8$	xy^6, xz^2	$3, 2$
S_{16}	$x^2z+yz^2+xy^4$	y^6, z^3	$3, 2$
S_{17}	$x^2z+yz^2+y^6$	y^4z, z^3	$3, 2$
U_{16}	$x^3+xz^2+y^5$	y^2z^2, y^3z^2	$3, 2$
J_{16}	$x^3+y^9+tx^2y^3$	y^{10}	2
W_{15}	$x^4+y^6+tx^2y^3$	y^7	2
Z_{15}	$x^3y+y^7+tx^2y^3$	y^8	2
Q_{14}	$x^3+yz^2+tx^2y^2+xy^4$	y^7	2
S_{14}	$x^2z+yz^2+y^5+ty^3z$	z^3	2
U_{14}	$x^3+xz^2+txy^3+zy^3$	yz^3	2

Inner modality 3

type	quasihomogeneous part	upper monomials	$\mu_f^{(1)}$
E_{24}	x^3+y^{13}	xy^9, xy^{10}, xy^{11}	$4,3,2$
E_{25}	x^3+xy^9	y^{14}, y^{15}, y^{16}	$4,3,2$
E_{26}	x^3+y^{14}	$xy^{10}, xy^{11}, xy^{12}$	$4,3,2$
Z_{23}	x^3y+y^{11}	xy^8, xy^9, xy^{10}	$4,3,2$
Z_{24}	x^3y+xy^8	y^{12}, y^{13}, y^{14}	$4,3,2$
Z_{25}	x^3y+y^{12}	xy^9, xy^{10}, xy^{11}	$4,3,2$
N_{19}	x^4y+y^6	xy^5, x^2y^4, x^2y^5	$4,3,2$
N_{20}^1	x^4y+xy^5	x^2y^4, y^7, y^8	$4,3,2$
N_{20}^2	x^5+y^6	x^2y^4, x^3y^3, x^3y^4	$4,3,2$
N_{21}	x^5+xy^5	x^3y^3, y^7, y^8	$4,3,2$
Q_{22}	$x^3+yz^2+y^{10}$	xy^7, xy^8, xz^2	$4,3,2$
Q_{23}	$x^3+yz^2+xy^7$	y^{11}, y^{12}, y^{13}	$4,3,2$
Q_{24}	$x^3+yz^2+y^{11}$	xy^8, xy^9, xz^2	$4,3,2$
V_{18}^{*1}	$x^2y+z^4+y^5$	y^4z, y^3z^2, y^4z^2	$3,3,2$
V_{18}^{*2}	$x^2y+y^3z+xz^3$	z^5, yz^4, yz^5	$3,3,2$
V_{19}^{*1}	$x^2y+z^4+y^4z$	y^3z^2, y^2z^3, y^3z^3	$3,3,2$
V_{19}^{*2}	$x^2y+y^3z+z^5$	yz^4, y^2z^3, y^2z^4	$3,3,2$
V_{19}^{*3}	$x^2y+xz^3+y^4$	yz^4, y^2z^3, y^2z^4	$3,3,2$
V_{20}^{*}	$x^2y+y^4+z^5$	y^2z^3, y^3z^2, y^3z^3	$3,3,2$
J_{22}	$x^3+tx^2y^4+y^{12}$	y^{13}, y^{14}	$3,2$
Z_{21}	$x^3y+tx^2y^4+y^{10}$	y^{11}, y^{12}	$3,2$
W_{20}	$x^3+yz^2+tx^2y^3+y^9$	y^{10}, y^{11}	$3,2$
N_{16}	$x^4y+sx^3y^2+tx^2y^3+xy^4$	y^6	2
V_{15}	$xz^2+syz^2+x^4+tx^2y^2+y^4$	y^2z^2	2

Inner modality 4

type	quasihomogeneous part	upper monomials	$\mu_f^{(1)}$
E_{30}	x^3+y^{16}	$xy^{11}, xy^{12}, xy^{13}, xy^{14}$	$5,4,3,2$
E_{31}	x^3+xy^{11}	$y^{17}, y^{18}, y^{19}, y^{20}$	$5,4,3,2$
E_{32}	x^3+y^{17}	$xy^{12}, xy^{13}, xy^{14}, xy^{15}$	$5,4,3,2$
W_{24}	x^4+y^9	$xy^7, x^2y^5, x^2y^6, x^2y^7$	$4,4,3,2$
W_{25}	x^4+xy^7	$x^2y^5, y^{10}, y^{11}, y^{12}$	$4,4,3,2$
Z_{29}	x^3y+y^{14}	$xy^{10}, xy^{11}, xy^{12}, xy^{13}$	$5,4,3,2$
Z_{30}	x^3y+xy^{10}	$y^{15}, y^{16}, y^{17}, y^{18}$	$5,4,3,2$
Z_{31}	x^3y+y^{15}	$xy^{11}, xy^{12}, xy^{13}, xy^{14}$	$5,4,3,2$
N_{24}^1	x^5+y^7	$x^3y^3, x^2y^5, x^3y^4, x^3y^5$	$4,3,3,2$
N_{24}^2	x^4y+xy^6	y^8, x^2y^5, y^9, y^{10}	$4,3,3,2$
N_{25}	x^4y+y^8	$x^2y^5, xy^7, x^2y^6, x^2y^7$	$4,3,3,2$
Q_{28}	$x^3+yz^2+y^{13}$	$xy^9, xy^{10}, xy^{11}, xz^2$	$5,4,3,2$
Q_{29}	$x^3+yz^2+xy^9$	$y^{14}, y^{15}, y^{16}, y^{17}$	$5,4,3,2$
Q_{30}	$x^3+yz^2+y^{14}$	$xy^{10}, xy^{11}, xy^{12}, xz^2$	$5,4,3,2$
S_{23}	$x^2z+yz^2+y^8$	xy^6, y^5z, y^6z, z^3	$4,4,3,2$
S_{24}	$x^2z+yz^2+xy^6$	y^5z, y^9, y^{10}, z^3	$4,4,3,2$
V_{23}^*	$x^2y+z^4+y^5z$	$y^2z^3, y^4z^2, y^3z^3, y^4z^3$	$4,3,3,2$
V_{24}^*	$x^2y+z^4+y^7$	$y^4z^2, y^6z, y^5z^2, y^6z^2$	$4,3,3,2$
V_{20}'	$x^3+xy^3+yz^3$	z^4, y^5, y^4z, y^5z	$3,3,3,2$
V_{21}'	$x^3+xz^3+y^4$	$xy^2z, yz^4, y^2z^3, y^2z^4$	$3,3,3,2$
J_{28}	$x^3+tx^2y^5+y^{15}$	y^{16}, y^{17}, y^{18}	$4,3,2$
Z_{27}	$x^3y+tx^2y^5+y^{13}$	y^{14}, y^{15}, y^{16}	$4,3,2$
N_{22}	$x^4y+tx^2y^4+y^7$	xy^6, y^8, y^9	$3,3,2$
Q_{26}	$x^3+yz^2+tx^2y^4+y^{12}$	y^{13}, y^{14}, y^{15}	$4,3,2$
V_{21}^*	$x^2y+z^4+ty^3z^2+y^6$	y^2z^3, yz^4, y^2z^4	$3,3,2$
V_{18}'	$x^3+y^4+ty^2z^2+z^4$	xyz^2, xz^3, xz^4	$3,3,2$
X_{21}	$x^4+sx^3y^2+tx^2y^4+y^8$	y^9, y^{10}	$3,2$
S_{20}^*	$x^2z+yz^2+y^7+sx^3y+tx^2y^3$	y^2z^2, z^3	$3,2$

参考文献

[1] V.I. ARNOLD, S.M. GUSEIN-ZADE and A.N. VARCHENKO, Singularities of Differentiable Maps Volume I, Monographs in Mathematics Vol. 82, Birkhäuser, Boston, 1985.

[2] Y. NAKAMURA and S. TAJIMA, *On weighted degrees for algebraic local cohomologies attached to semiquasihomogeneous singularities*, preprint.

[3] Y. NAKAMURA and S. TAJIMA, *Unimodal singularities and differential operators*, Séminaires et Congrès, Société Mathématique de France, to appear.

[4] K. SAITO, *Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen*, Invent. Math. **14** (1971), 123–142.

[5] S. TAJIMA and Y. NAKAMURA, *Algebraic local cohomology classes attached to quasi-homogeneous isolated hypersurface singularities*, Publ. of RIMS, Kyoto Univ. **41** (2005), 1–10.

[6] S. TAJIMA and Y. NAKAMURA, *On the dual space of the Tjurina algebra attached to a semi quasihomogeneous isolated singularity*, Banach Center Publ. **65** (2004), 261–272.

[7] E. YOSHINAGA and M. SUZUKI, *Normal forms of nondegenerate quasihomogeneous functions with inner modality* ≤ 4, Invent. Math. **55** (1979), no. 2, 185–206.